

Школьный этап олимпиады по математике учащихся 11 класса
Трицук Валентин Евгеньевич.

~ 11.1

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+y+x^2y+xy^2=24 \end{cases}$$

$$1) \quad x+y+x^2y+xy^2=24$$

$$(x+y)+xy(x+y)=24$$

$$(x+y)(1+xy)=24$$

$$x+y=5$$

$$5(1+xy)=24$$

$$1+xy=\frac{24}{5}$$

$$xy=\frac{19}{5}$$

2)

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)(x^2+2xy+y^2)-xy-2xy=$$

$$=(x+y)((x+y)^2-3xy)$$

$$x^3+y^3=5(5^2-3 \cdot \frac{19}{5})=5(25-\frac{57}{5})=5 \cdot \frac{125-57}{5}=68$$

$$\text{Ответ: } x^3+y^3=68$$

75

~ 11.4.

$$\sin \angle A = 2 \sin \angle B \cdot \cos \angle C$$

$$\text{Пусть } AB=2, BC=a, AC=b$$

$$1) \quad \frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin \angle B}{b} \quad \frac{2 \sin \angle B \cdot \cos \angle C}{a} = \frac{\sin \angle B}{b} \quad \frac{2 \cos \angle C}{a} = \frac{1}{b}$$

(по теореме синусов)

$$2 \cos \angle C = \frac{a}{b}$$

$$2) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C \quad c^2 = a^2 + b^2 - ab(2 \cos \angle C)$$

(по теореме косинусов)

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = b^2, \quad AB^2 = AC^2, \quad AB = AC$$

$$AB = AC \Rightarrow \triangle ABC - \text{равнобедренный.}$$

75

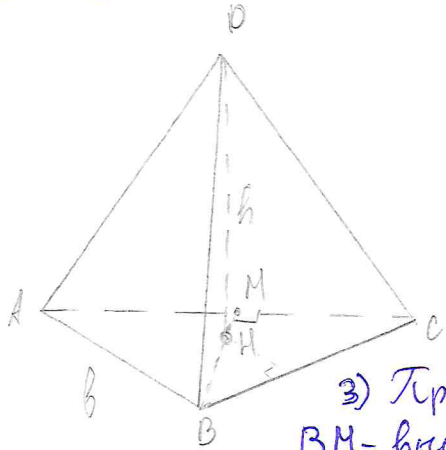
~ 11.5

		-1		
	1	0	0	
1	-2	2	1	-2
	2	-1	0	
		0		

75

~ 11.3.

- 1) Пусть сторона куба равна a , тогда: $V_k = a^3$, $S_{n.k} = 6 \cdot a^2$
- 2) Пусть сторона тетраэдра равна b , высота тетраэдра - $h(DH)$



$$V_T = \frac{1}{2} h \cdot S_{осн}$$

$$S_{осн} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ т.к. } \triangle ABC - \text{правильный}$$

$DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp BM$, $\triangle DMH$ - прямоугольный

$$h = DH = \sqrt{DB^2 - BM^2}$$

3) Прямая BM пересекает AC в (-) M
BM - высота и медиана, т.к. проходит через M, тетраэдр правильный.

$BM \perp AC \Rightarrow \triangle BMC$ - прямоугольный

$$MC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} b \text{ (медиана)}$$

$$MB = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3b^2}{4}} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$BH : HM = 2 : 1$ (медиана)

$$BM = \frac{2}{3} BH \quad BH = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$$

$$h) DH = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{3}} = b\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$V_T = \frac{1}{2} b\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{b^3 \sqrt{2}}{8}$$

$$S_{n.T} = 4 \cdot S_{осн}$$

$$S_{n.T} = 4 \cdot \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = b^2 \sqrt{3}$$

$$5) V_k = V_T \quad a^3 = \frac{b^3 \sqrt{2}}{8} \quad a = \frac{b \sqrt[3]{2}}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{n.k.}}{S_{n.T}} &= \frac{6a^2}{b^2 \sqrt{3}} \\ &= \frac{6 \left(\frac{b \sqrt[3]{2}}{2}\right)^2}{b^2 \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \frac{b^2 \sqrt[3]{2}}{4}}{b^2 \sqrt{3}} = \frac{\frac{6 \cdot (\sqrt[3]{2})}{4 \sqrt{3}}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt[3]{2}) \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Ответ: } S_{n. \text{куба}} : S_{n. \text{тетраэдра}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$